



## توسعه یک مدل ریاضی برای پیش بینی تغییرات رطوبت گلابی در حین خشک شدن همرفتی

محسن دلوی اصفهان

۱- استادیار گروه علوم و صنایع غذایی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران.

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>کارایی چندین مدل نظری برای پیش بینی میزان رطوبت برش های گلابی در هنگام خشک شدن ارزیابی و مقایسه شد. ورقه های گلابی در ۵ درجه حرارت مختلف (۷۰-۶۰-۵۰-۴۰-۳۰) خشک و ضرایب نفوذ رطوبت و انتقال جرم همرفتی تخمین زده شد. در مرحله بعدی، مدل انتقال جرم با استفاده از حل ریاضی قانون دوم انتشار فیک با مدل های مختلف عددی و تحلیلی توسعه یافت. نتایج مدل های مورد مطالعه نشان داد که هر دو مدل عددی در توصیف منحنی های خشک کردن آزمایشی کاملاً دقیق تر از مدل تحلیلی بودند. با این حال، بهترین نتیجه با مدل ترکیبی ارائه شده در این مطالعه به دست آمد. این مدل بالاترین مقدار ضریب تبیین (<math>R^2=0.999</math>) و کمترین مقدار ریشه میانگین مربعات خطا (<math>RMSE=0.06</math>) را نشان داد. دقت بالاتر این مدل را می توان به این واقعیت نسبت داد که این مدل جمله ای را برای شبیه سازی انتقال رطوبت همرفتی در نظر گرفته و شرایط مرزی مناسب را انتخاب می کند. با استفاده از این مدل، می توان تغییرات رطوبت در برش های گلابی را با دقت بالا به عنوان تابعی از متغیرهای داخلی (ضخامت و ترکیب شیمیایی) و عوامل خارجی (دما، رطوبت نسبی و سرعت هوا) پیش بینی کرد.</p>	<p>تاریخ های مقاله :</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۲۹</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۲</p> <p>کلمات کلیدی:</p> <p>خشک کردن، حل عددی، حل تحلیلی و گلابی.</p> <p>DOI: 10.52547/fsct.18.120.22</p> <p>DOR: 20.1001.1.20088787.1400.18.120.11.3</p> <p>* مسئول مکاتبات: dalvi@jahromu.ac.ir</p>

## ۱- مقدمه

گلابی (*Pyrus communis L.*) میوه ای بومی مناطق معتدل است و بیشتر در مناطقی با آب و هوای معتدل کشت می شود و ایران با تولید بالغ بر ۱۳۵ هزار تن در سال پانزدهمین کشور دنیا در تولید گلابی شناخته می شود [۱].

در این بین، استان اصفهان با تولید بیش از ۶۰۰۰ تن تولید گلابی همواره جزو ۴ استان اصلی تولید گلابی در کشور بوده است. رقم سیبری به دلیل تنفس بالا، رطوبت بالا و حساسیت زیاد این میوه به آسیب مکانیکی معمولاً به سرعت دچار فساد می شود و در صورت عدم وجود سیستم های سرمایش و انبارداری مناسب بخش قابل توجهی از این قبل از رسیدن به بازار مصرف اتلاف خواهد شد. فراوری خشک کردن می تواند به عنوان یک روش مفید و کارآمد برای حفظ و نگهداری این محصول مورد استفاده قرار گیرد. اگرچه انواع مختلفی از سیستم ها برای فرایندهای خشک کردن تولید شده اند، خشک کن معمولی هوای گرم هنوز هم بیشترین کاربرد و استفاده را شامل می شوند [۲].

میوه خشک باید بافتی ترد، عطر و طعم دلپذیر و ظاهری جذاب داشته باشد تا بتوان آن را برای مصرف مستقیم مورد استفاده قرار داد. این ویژگی ها به شدت تابعی از دما و میزان رطوبت محصول می باشد. علاوه بر این سرعت خشک شدن و خصوصیات محصول خشک شده به شرایط خارجی فرآیند مانند درجه حرارت هوا، رطوبت و سرعت هوا نیز بستگی دارد. علاوه بر عوامل خارجی پارامترهای داخلی از جمله هندسه و شکل محصول، ضخامت، ترکیب شیمیایی و ساختار نیز بر فرآیند تاثیر گذار هستند. پیچیدگی ساختار میوه و گوناگونی ترکیب میوه ها و تنوع پدیده های انتقال (جرم، حرارت و ممنتوم) در حین فرآیند باعث شده است که کنترل فرآیند خشک کردن میوه ها با چالش هایی روبرو شود. به همین دلیل، بکارگیری مدل سازی و شبیه سازی ریاضی می تواند ابزاری مناسب برای مقابله با پیچیدگی فرآیند خشک کردن در نظر گرفته شود، در ضمن امکان رسیدن به شرایط مطلوب عملیاتی و بهینه سازی فرآیند را ممکن و فراهم می سازد [۳].

مدلهای ریاضی برای خشک کردن میوه را می توان در سه دسته اصلی نظری<sup>۱</sup>، نیمه نظری<sup>۲</sup> و تجربی<sup>۳</sup> طبقه بندی کرد، مدل های

1. Theoretical models
2. Semi-theoretical

نیمه نظری و تجربی هنوز مورد استفاده قرار می گیرند و ابزار خوبی برای مدل سازی سینتیک خشک کردن میوه ها هستند. با این حال، به دلیل آنکه مدل های نظری درک بهتری از مکانیسم خشک کردن و همچنین امکان بهینه سازی فرآیند را در اختیار کاربر قرار می دهند استفاده از این مدل ها رو به افزایش می باشد [۴].

در مدل های نظری به بررسی پدیده های انتقال در دو سطح (هوا - میوه) پرداخته می شود. بدین منظور معادلات انتقال که همان، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی<sup>۴</sup> هستند باید با استفاده از روش های عددی یا تحلیلی حل شوند. معادله اصلی انتقال جرم در حین خشک کردن از حل معادله فیک<sup>۵</sup> حاصل می شود. بر اساس این معادله، نیروی محرکه نفوذ آب در داخل میوه، از گرادیان غلظت ایجاد شده در اثر تبخیر آب بر روی سطح، به دلیل تفاوت فشار جزئی بخار آب بین سطح و هوا حاصل می شود. در این معادله پارامتری تحت عنوان ضریب نفوذ موثر<sup>۶</sup> وجود دارد که بیانگر مکانیسم های مختلف انتقال رطوبت در داخل میوه مانند انتشار مولکولی<sup>۷</sup>، جریان مویرگی<sup>۸</sup>، جریان ناسن<sup>۹</sup> و جریان هیدرودینامیکی<sup>۱۰</sup> می باشد [۵].

مطالعات زیادی در خصوص مدل سازی با مدل های نظری برای میوه ها در منابع وجود دارد که برخی از آنها در جدول (۱) اشاره شده است. سه روش اصلی حل عددی که به طور موفقیت آمیزی برای تقریب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار رفته است، عبارتند از: روش تفاضل محدود (اختلاف متناهی)، اجزاء محدود و حجم محدود [۶].

بر اساس نتایج تحقیقات کاسترو و همکاران (۲۰۱۸) حدود ۳۰٪ از مدل سازی های خشک کردن جریان همرفتی برای میوه ها و سبزیجات از روش تفاضل محدود استفاده شده است [۳]. بسته به روش تقریب مشتق ها در این روش دو الگوریتم اصلی حل بر مبنای صریح<sup>۱۱</sup> و یا ضمنی<sup>۱۲</sup> در این روش حل توسعه داده شده است [۷].

3. Empirical
4. Nonlinear partial differential equations
5. Fick's Second Law for mass transfer
6. Effective moisture diffusivity
7. molecular diffusion
8. capillary flow
9. Knudsen flow
10. hydrodynamic flow
11. Explicit
12. Implicit

**Table 1** Overview of some theoretical models for fruit drying.

Fruit	Model characteristics	Operating conditions	References
Apple	To study the effects of external factors on drying, 2D and predicting the degree of deformation during drying	Air temp: 25.1 °C Air velocity: 2.34 m/s Geometry: rectangle	(W. Aregawi, Defraeye, Saneinejad, Vontobel, Lehmann, Carmeliet, et al., 2014)
Apple	Simultaneous mass and heat transfer modeling in a three-dimensional diagram	Air temperature: 60 °C Air speed: 0.64 - 2.75 m/s Geometry: Rectangular	(Khan & Straatman, 2016)
Apple	Two-dimensional, predicts moisture loss and sample deformation	Air temperature: 25 °C Air speed: 0.01 m/s Geometry: Cylindrical	(W. A. Aregawi, Abera, Fanta, Verboven, & Nicolai, 2014)
Quince	One-dimensional mass transfer considering shrinkage and variable thermophysical properties in the model	Air temperature: 40,50,60 °C Air speed: 1-2 m/s Geometry: slab	(Tzempelikos, Mitrakos, Vouros, Bardakas, Filios, & Margaritis, 2015)
Quince	To predict the distribution of temperature and humidity using the Green analytical method.	temperature: 40,50,60 degrees Celsius Air speed: 1-2 meters per second Geometry: Blade	(Vahidhosseini, Barati, & Esfahani, 2016)

مرزی دقیق توسعه داده خواهد شد تا تصویر دقیق تری از رفتار خشک شدن محصول در حین فرایند ارایه شود، بدیهی است با داشتن چنین مدلی شانس بهینه سازی فرایند و افزایش کیفیت محصول نهایی به طور قابل توجهی افزایش خواهد یافت.

## ۲- مواد و روش ها

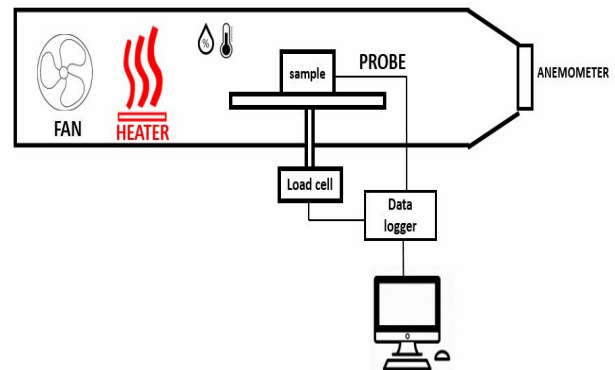
گلابی مورد استفاده در این تحقیق متعلق به جنس رقم سیبری *Pyrus communis. L* است که از باغ های منطقه خمینی شهر اصفهان تهیه شد. این رقم حساسیت زیادی به آسیب فیزیکی داشته و به دلیل رطوبت بالا مستعد فساد می باشد. به منظور خشک کردن محصول، گلابی را ابتدا شسته، پوست آن را جدا کرده، هسته آن را گرفته و به شکل مستطیلی با ضخامت ۱۰ میلی متر برش داده شد. سپس آنها را در یک خشک کن همرفت هوا خشک شدند. دمای هوا، سرعت هوا و رطوبت نسبی هوای به ترتیب با استفاده از ترموکوپل نوع K، باد سنج هوای گرم و رطوبت سنج اندازه گیری شد. این آزمایشات در سه تکرار اندازه گیری و اجرا شد. درجه حرارت خشک کن در ۵ دمای (۳۰-۴۰-۵۰-۶۰ و ۷۰ درجه سانتیگراد) تنظیم شد.

خشک کردن یک فرایند پیچیده انتقال جرم و حرارت محسوب می شود و داشتن مدلی که بتواند رفتار محصول در حین فرایند خشک کردن را پیش بینی نماید، نه تنها اجازه طراحی و کنترل دقیق عملیات خشک کردن را میسر می سازد، بلکه به بهینه سازی فرایند و حفظ ارزش تغذیه ای محصول نهایی نیز منجر خواهد شد. اگرچه منحنی های سینتیک خشک کردن میوه ها و سبزیجات معمولاً با استفاده از معادلات غیرنظری مدل سازی می شوند، اما این مدل ها به شدت به شرایط نمونه و خشک کن وابستگی دارند و در صورت بکارگیری مدل در خارج از محدوده دما و رطوبت نسبی اندازه گیری شده با خطای قابل توجهی روبرو خواهند شد [۸]، در عین حال در اکثر مدل های نظری که برای خشک کردن میوه ها و سبزیجات مورد استفاده قرار گرفته است، به منظور ساده سازی محاسبات از اثر انتقال رطوبت به شکل همرفتی<sup>۱</sup> در داخل نمونه در معادله انتقال جرم صرف نظر شده است و یا شرایط مرزی دقیق و درستی برای فرایند خشک کردن مورد استفاده قرار نگرفته است، که همین موضوعات باعث خطای محاسبات خواهند شد [۹]. در تحقیق حاضر به منظور مرتفع نمودن این شکاف، مدلی نظری با لحاظ کردن کلیه جملات (انتشار فیکین<sup>۲</sup> و همرفتی) در معادله حاکم و شرایط

1. Convective moisture transport
2. Fickian diffusion

## ۱-۲- تعیین درصد ماده خشک نمونه

برای تعیین میزان رطوبت و مقدار ماده خشک نمونه گلابی، ۵ گرم نمونه در داخل آون (Memmert, Germany) در دمای ۷۵ درجه سانتیگراد تا رسیدن به وزن ثابت خشک شدند و میزان رطوبت و ماده خشک تعیین شد.



**Fig 1** Schematic diagram of the experimental set-up  
**۲-۲- تعیین ضریب دیفوزیون (انتشار) و مدل**

### نظری-تحلیلی

برای تعیین میزان ضریب نفوذ موثر رطوبت از رابطه (۱) استفاده شد، بدین منظور لگاریتم تغییرات نسبت رطوبت (MR) در برابر زمان رسم و با استفاده از شیب خط، مقدار ضریب نفوذ حرارتی تعیین شد [۱۰]. در ضمن بر اساس رابطه اخیر، که نشانگر مدل تحلیلی انتشار رطوبت در ماده غذایی است، تغییرات میزان رطوبت نمونه به عنوان تابعی از زمان خشک کردن برآورد گردید [۱۱].

(۱)

$$MR = \frac{M_t - M_e}{M_0 - M_e} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right) \exp \left( - \frac{(2n-1)^2 \pi^2 D_{eff} t}{4l_0^2} \right)$$

## ۳-۲- توسعه مدل های نظری- عددی

برای بررسی انتقال جرم در نمونه از دو مدل نظری- عددی مختلف استفاده شد. معادلات اصلی انتقال جرم با اعمال شرایط اولیه و مرزی به طور عددی و با استفاده از روش تفاضل محدود

بر مبنای شمای صریح<sup>۱</sup> حل گردیدند. در این مطالعه نمونه گلابی به ضخامت ۱۰ میلی متر به ۲۰ گره طولی تقسیم شد. ورودی های مورد استفاده در مدل در جدول (۲) نشان داده شده است و برنامه نویسی بر روی نرم افزار MATLAB R2016b انجام پذیرفت [۱۲].

در توسعه مدل فرض شده است که شکل هندسی نمونه بصورت یک تیغه می باشد. مقدار رطوبت در سرتاسر نمونه قبل از خشک کردن یکنواخت و برابر با مقدار ثابتی است. در مدل تحلیلی اول، فرض می شود که به محض قرار گرفتن نمونه داخل خشک کن، تبخیر در سطح نمونه رخ می دهد که شدت آن توسط ضریب انتقال جرم ( $h_m$ ) و گرادیان فشار جزئی بخار آب مابین سطح نمونه و هوای گرم خشک کن کنترل می گردد و سپس به تبع انتقال جرم در سطح، پدیده انتشار ناپایا در داخل نمونه رخ می دهد. در مقابل در مدل دوم که توسط مک کارتی و همکاران (۱۹۹۱) ارائه شده است، علاوه بر دیفوزیون<sup>۲</sup>، انتقال رطوبت به شکل همرفتی<sup>۳</sup> نیز در داخل نمونه در نظر گرفته شده است. علاوه بر این فرض شده است که به محض قرار گرفتن نمونه در داخل خشک کن، لایه سطحی نمونه به سرعت رطوبت خود را از دست می دهد و میزان آن به محتوای رطوبت تعادلی تقلیل می یابد، در نتیجه شرایط مرزی و معادله حاکم بین دو مدل عددی با هم اختلاف دارد [۱۳]. میزان محتوای رطوبت تعادلی نمونه بر اساس مدل Guggenheim-Anderson-de Boers (GAB) تخمین زده شد، ثوابت معادله نیز بر اساس نتایج تحقیق مشخص شد [۱۴].

### مدل نظری- عددی اول

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right] \quad (۲)$$

شرط اولیه

(۳)

$$C = C_0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad \text{for} \quad \text{all} \quad x$$

شرایط مرزی

1. Explicit
2. Fickian diffusion
3. Convective moisture transport

(۱۵)

$$C = C_0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad \text{for} \quad \text{all} \quad x$$

مدل‌های عددی ریاضی فوق قادر هستند بر مبنای ورودی های مدل (خصوصیات هوای گرم خشک کن، ابعاد اولیه محصول، خواص فیزیکی محصول، دما و رطوبت اولیه نمونه) مقادیر رطوبت مطلق نمونه را بعنوان تابعی از زمان و مکان، میزان فعالیت آبی در سطح نمونه و آفت کلی وزن را در طی خشک کردن برآورد نمایند. معتبرسازی مدل با استفاده از مقایسه داده های آزمایشگاهی و نتایج حاصل از مدل‌های نظری انجام شد.

#### ۲-۴- تجزیه و تحلیل آماری

نتایج برای متغیرهای کمی به صورت (میانگین + انحراف معیار گزارش شده است). به منظور بررسی اثر دما بر سرعت خشک شدن، از آنالیز واریانس یک طرفه (ANOVA way-One) و سطح معنی داری در آزمون ها ۰.۵٪ در نظر گرفته شده است. علاوه بر این به منظور مطابقت بین داده های آزمایشی و داده های مدل از دو معیار آماری، ضریب تبیین ( $R^2$ ) و ریشه میانگین مربعات خطا<sup>۲</sup> (RMSE) برای ارزیابی تناسب بین مدل با داده‌های تجربی (آزمایشی) مورد استفاده قرار گرفت [۱۷].

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (M_{pre,i} - M_{exp,i})^2}{\sum_{i=1}^N (M_{pre,i} - M_{pre,i})^2} \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (M_{exp,i} - M_{pre,i})^2}{N}} \quad (17)$$

در روابط بالا  $M_{pre,i}$  و  $M_{exp,i}$  به ترتیب رطوبت بر حسب ماده جامد پیش بینی شده توسط مدل‌ها و رطوبت آزمایشی و  $N$  تعداد داده‌ها می‌باشد.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad t > 0 \quad \text{for} \quad X = L \quad (18)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial x} = h_m (C_{food} - C_{air}) \quad \text{at} \quad t > 0 \quad \text{for} \quad x = L$$

در رابطه فوق دو جمله در شرط مرزی معادله (۵) با استفاده از روابط زیر برآورد شد.

$$C_{food} = p_s(T_s)/(R_u T) \quad (19)$$

$$C_{air} = p_a(T_a)/(R_u T) \quad (20)$$

و فشار بخار جزئی ماده غذایی و هوا به ترتیب با استفاده از رابطه ۸ و ۹ تعیین شد.

$$p_s(T_s) = a_w p_{sat}(T_s) \quad (21)$$

$$P_a(T_a) = RH_a P_{sat}(T_a) \quad (22)$$

و فشار بخار آب اشباع غذا و هوا در دمای مختلف با استفاده از جداول بخار اشباع مشخص شد و فعالیت آبی در غذا با استفاده از مدل (GAB) در هر مرحله زمان تعیین شد [۱۵].

$$\frac{W}{W_0} = \frac{Ckaw}{(1-kaw)(1-kaw+Ckaw)} \quad (23)$$

تعیین ضریب همرفتی انتقال جرم

با توجه به شکل ورقه های گلابی، ضریب انتقال جرم ( $h_m$ ) با استفاده از روش اعداد بدون بعد برای حالت خطی روی صفحات مسطح تعیین شد. طبق این رابطه می توان با استفاده از عدد شرود<sup>۱</sup> میزان این ضریب را تعیین نمود (معادله ۱۱) [۱۶].

$$Sh = \frac{h_m L}{D_a} = 0.664 Re^{0.5} Sc^{0.33} \quad (24)$$

مدل نظری- عددی دوم

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{D}{C_s} \left[ \frac{\partial C}{\partial x} \right]^2 + D \left( \frac{C}{C_s} + 1 \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (25)$$

شرایط مرزی

$$C = C_e \quad \text{at} \quad t \geq 0 \quad \text{for} \quad x = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad t \geq 0 \quad \text{for} \quad x = L \quad (27)$$

شرط اولیه

Table 2 Parameters used in the model

Property	Value
Diffusivity	$2.75 \times 10^{-09} \text{ m}^2/\text{s}$
Convective mass transfer coefficient	$2.0 \times 10^{-07} \text{ m/s}$
Air velocity	1 m/s
Product density	$860 \text{ kg/m}^3$
GAB constant (C)	0.058
GAB constant (W0_monolayer water)	2.865
GAB constant (k)	0.99
Equilibrium moisture content	0.072 kg H <sub>2</sub> O/kg dry matter
Initial moisture content	0.875 kg H <sub>2</sub> O/kg dry matter
Number of node in axial direction	20
Time step	5 s

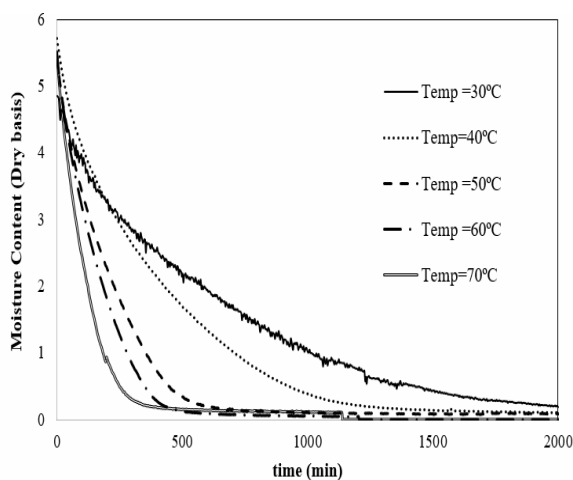


Fig 2 Moisture Content versus Drying Time as a function of dryer temperature

شکل (۳) نمودار تغییرات مقادیر میانگین رطوبت تجربی و پیش بینی شده بوسیله مدل تحلیلی (رابطه ۱) را در طی خشک کردن ورقه های گلابی نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، مدل مذکور قادر به پیش بینی دقیق تغییرات میزان رطوبت نیست، مقدار عددی ضریب تبیین و ریشه میانگین مربعات خطا به ترتیب  $0.948$  و  $0.603$  محاسبه شد که در مجموع حاکی از عدم انطباق کامل بین نتایج مدل و نتایج آزمایشی می‌باشد عدم توانایی این معادله در پیش بینی دقیق تغییرات رطوبت توسط سایر محققین نیز گزارش شده است [۲۰]. دلیل این عدم انطباق به پیش فرض‌های در نظر گرفته شده در توسعه این مدل می‌تواند مربوط باشد، برای مثال در این مدل فرض بر آن است که شکل نمونه به صورت تیغه بی نهایت<sup>۲</sup>

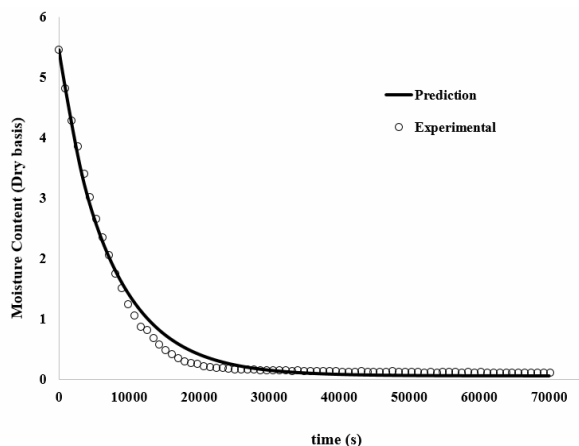
2. Infinite slab

### ۳- نتایج و بحث

شکل (۲) تغییرات میزان رطوبت (بر اساس وزن خشک<sup>۱</sup>) به عنوان تابعی از دما و زمان خشک کردن را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود در ابتدای فرایند به دلیل بالا بودن اختلاف فشار بخار آب بین سطح نمونه و هوای خشک‌کن، سرعت و شیب نمودار تند می‌باشد، اما با گذشت زمان و کاهش گرادیان فشار بخار آب و نزدیک شدن میزان رطوبت به سطح رطوبت تعادلی هوای خشک‌کن، شیب کاهش و تغییرات رطوبت بطئی و کند می‌شود. در ضمن همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود با افزایش دمای خشک‌کن، زمان لازم برای رسیدن به رطوبت تعادلی به شکل چشمگیری کاهش نشان می‌دهد. به طوریکه در دمای  $30$  درجه سانتیگراد مدت زمان لازم برای رسیدن به رطوبت  $0.2$ ، حدود  $2000$  دقیقه است در حالی که رسیدن به همین میزان رطوبت در دمای  $70$  درجه سانتیگراد تنها  $370$  دقیقه زمان می‌برد که حدود  $1/5$  زمان قبلی است. نتایج آماری نیز نشان داد که اثر دما بر روی مدت زمان خشک کردن معنا دار است ( $P < 0.05$ ). این نتیجه با نتایج به دست آمده توسط Royen و Manjunatha و Raju (۲۰۱۹) و همکاران (۲۰۲۰) مطابقت نشان می‌دهد [۱۸ و ۱۹].

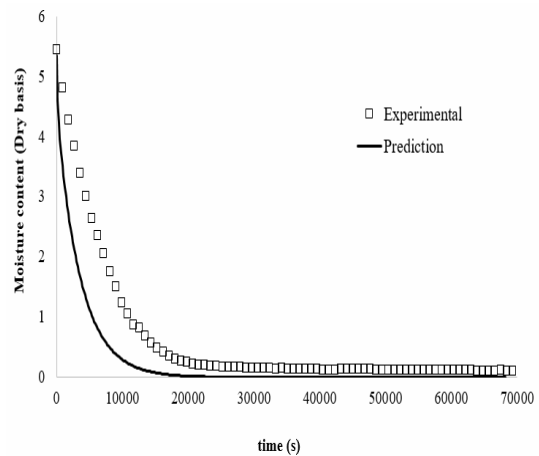
1. Dry basis moisture content

ضریب انتشار نیز متغیری است که هم به دما و هم تغییرات رطوبت نمونه وابسته است که در این مدلها صرفاً وابستگی دمایی این ضریب لحاظ شده است [۳]. در ضمن همانطوری که از نمودار (۵) مشاهده می‌شود، مقدار رطوبت پیش بینی شده همواره کمتر از مقدار تجربی برآورد شده است، یا به عبارت دیگر افت رطوبت پیش بینی شده توسط مدل بیشتر از داده های آزمایشی است که این موضوع به دلیل شرط مرزی ثابتی است که در مدل لحاظ شده است  $(C=C_e)$ ، این در حالی است که Kaddoura و همکاران (۲۰۲۱) نشان دادند که انتقال جرم در حین خشک کردن عمدتاً ناشی از همرفتی است و ضریب انتقال جرم همرفتی به عنوان پارامتر اصلی در شبیه سازی و مدل سازی خشک کردن معرفی کردند، مقدار عددی این ضریب  $2 \times 10^{-7}$  متر بر ثانیه در این تحقیق بر آورده شد که با مقادیر گزارش شده توسط Golestani و همکاران (۲۰۱۳) همخوانی نشان می‌دهد [۱۶] و به همین دلیل شرط مرزی همرفتی در مدل توسعه یافته ترکیبی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. هر دو مدل به طور گسترده‌ای برای بررسی تغییرات رطوبت نمونه در حین خشک کردن محصول سیب که از لحاظ گیاهشناسی با گلابی هر دو در یک خانواده<sup>۲</sup> هستند مورد استفاده قرار گرفته اند [۱۵، ۲۴].



**Fig 4** Comparison of moisture content (Dry basis) determined by experimentation and prediction using the numerical model (Eq. 2)

است که با واقعیت تفاوت فاحش دارد. عامل دیگری که بر روی خطا موثر است، تعیین حداقل تعداد جمله لازم از سری یا دنباله است که نتایج را بتواند همگرا کند.



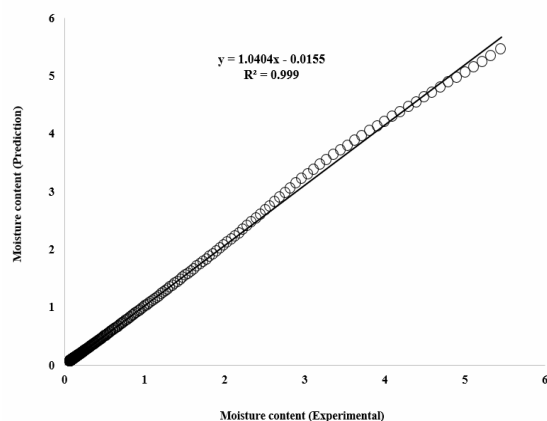
**Fig 3** Comparison of moisture content (Dry basis) determined by experimentation and prediction using the analytical model (Eq. 1)

نمودارهای ۴ و ۵ نتایج دو مدل عددی خشک شدن ورقه های گلابی در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد را نشان می‌دهد، نسبت به مدل تحلیلی دقت مدل افزایش یافته است و ضریب تبیین بین مقادیر پیش بینی شده و تجربی در دو مدل عددی به ترتیب برابر با ۰/۹۹۰ و ۰/۹۹۲ تعیین شد. اختلاف بین نتایج تجربی و پیش بینی شده می‌تواند به دلیل عوامل مختلفی مربوط باشد برای مثال در نمودار (۴) اثر همرفت رطوبت در داخل محصول در حین خشک شدن در مدل لحاظ نشده است که می‌تواند منجر به خطا شود. به جز این پارامتر، عوامل دیگری که در این عدم انطباق موثر است به چروکیدگی محصول در حین خشک کردن و یا ثابت فرض شدن ضریب ضریب (انتشار) دیفوزیون در حین خشک کردن می‌تواند مرتبط باشد. یوان و همکاران (۲۰۱۹) نشان دادند که در حین خشک کردن میوه های و سبزیجات، تغییر شکل و یا چروکیدگی قابل توجهی (در برخی موارد حتی تا ۹۰٪) در محصول رخ می‌دهد که در مدل‌های عددی منظور نشده است [۲۱] این تغییر شکل در حین خشک کردن، نه تنها کاهش سرعت انتقال گرما و جرم را سبب می‌شود بلکه کیفیت محصول خشک شده را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد [۲۲].

1. Convective mass transfer coefficient  
2. Rosaceae

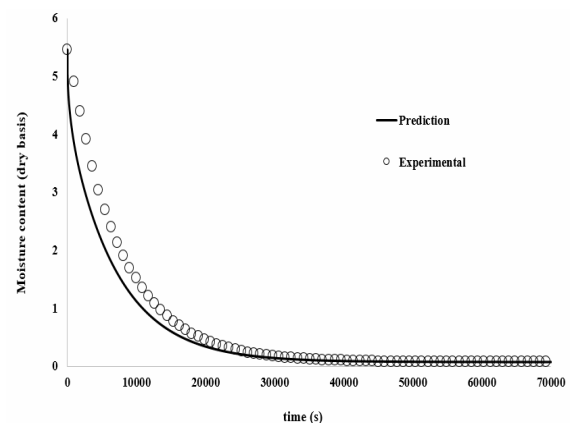
دقیق‌تری در خصوص مکانیسم دیفوزیون و رفتار خشک شدن محصول در اختیار ما قرار دهد.

مدل اخیر به عنوان مدل اصلی در این تحقیق انتخاب شد. نمودار تغییرات مقادیر رطوبت آزمایشگاهی در مقابل داده های پیش بینی شده بوسیله مدل ترکیبی در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد در شکل (۷) نشان داده شده است، هرچه شیب معادله این خط به سمت عدد یک و عرض از مبدا آن به سمت صفر میل کند، نشان دهنده نزدیکتر بودن نتایج تجربی و پیش بینی شده و دقت بالاتر مدل می باشد، و این شکل نیز تاییدی دیگر بر دقت بالای مدل سوم می باشد. نتایج مشابهی برای دماهای دیگر نیز به دست آمده که به دلیل محدودیت فضا در اینجا ارایه نشده است [۲۲].



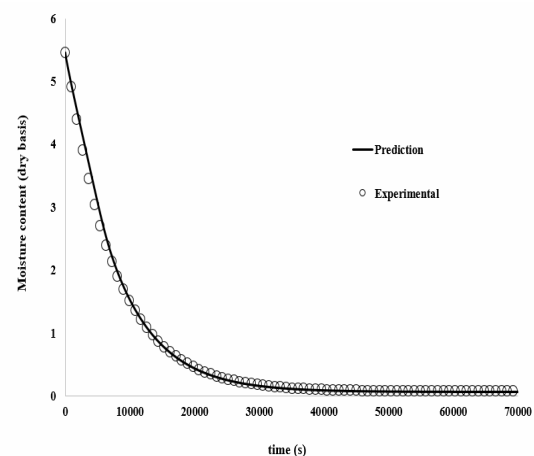
**Fig 7** Comparison between experimental data and data predicted by the combined model

بنابراین با استفاده از این مدل ترکیبی می توان با دقت خوبی تغییرات رطوبت در نقاط مختلف نمونه و در هر لحظه از فرایند را به خوبی و با دقت بالایی برآورد نمود. یکی از محاسن بکارگیری مدل های تحلیلی به دست آوردن تعیین مقدار رطوبت در هر نقطه از نمونه محصول در هر لحظه می باشد، برای مثال نمودار ۸ تغییرات رطوبت در سه نقطه سطح، مرکز و نقطه ای در حداصل بین سطح و مرکز در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد نشان می دهد. می توان مشاهده نمود که مقدار رطوبت در سطح که مستقیماً در تماس با هوای گرم است، بسرعت آفت می کند در حالیکه بدلیل پایین بودن ضریب نفوذ رطوبت محصول، آفت رطوبت در نواحی داخلی و مرکز بکندی انجام می شود. نتایج مشابهی توسط سایر محققین برای محصولات مختلف گزارش شده است [۲۲ و ۲۵].



**Fig 5** Comparison of moisture content (Dry basis) determined by experimentation and prediction using the numerical model (Eq. 12)

در گام بعدی این تحقیق یک مدل ترکیبی بر اساس مدل های قبلی توسعه داده شد. در مدل اخیر، شرایط مرزی مدل اول (همرفت جرم در سطح) و معادله انتقال جرم عددی دوم (معادله ۱۲) مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج این مدل اخیر در شکل (۶) نشان داده شده است.



**Fig 6** Comparison of moisture content (Dry basis) determined by experimentation and prediction using the combined numerical model

همان طور که مشاهده می شود در این حالت تطابق نسبتاً کاملی بین داده های آزمایشی و داده های مدل مشاهده می شود. بطوریکه ضریب تبیین مدل به حدود ۰/۹۹۹ و ریشه میانگین مربعات خطا به عدد ۰/۰۶۰۳ رسیده است که کمترین مقدار در بین سایر مدل ها را نشان می دهد و نشان دهنده تطابق بسیار عالی مدل با نتایج تجربی است. چنین مدلی می تواند اطلاعات



فاصل بین این دو مقدار، بافت سیب سفت و چرمی و فاقد تردی است [۲۶]. بنابراین می‌توان زمان خشک کردن را برای رسیدن به فعالیت آبی مورد نظر تنظیم نمود. شکل (۹) نمودار تغییرات میزان رطوبت نمونه پیش بینی شده در مدل عددی ترکیبی به عنوان تابعی از زمان و مکان در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد را نشان می‌دهد.

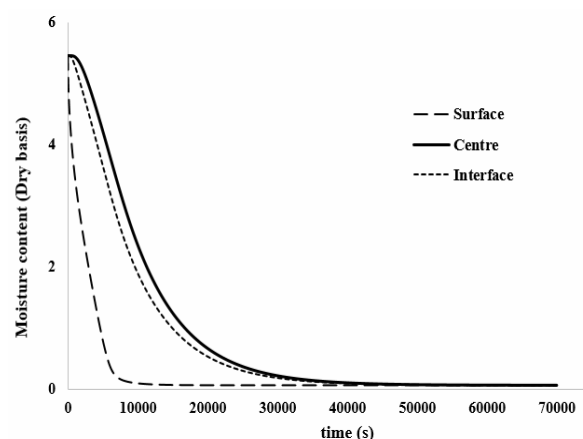
با استفاده از مدل مذکور می‌توان میزان رطوبت در نقاط مختلف را تعیین و با بکارگیری مدل GAB، فعالیت آبی محصول را نیز می‌توان معین نمود. همان‌طور که می‌دانیم فعالیت آبی پارامتر مهمی است که بر روی فعالیت های میکروارگانیسم ها، فعالیت‌های شیمیایی و یا تغییرات فیزیکی محصول تاثیر بسزایی دارد. برای مثال بورن (۱۹۹۱) نشان داد که تردی سیب تنها در فعالیت آبی بالای ۰/۹۹ و یا کمتر از ۰/۰۲ باقی می‌ماند و در حد

**Table 3** Statistical results obtained for experimental data and numerical methods

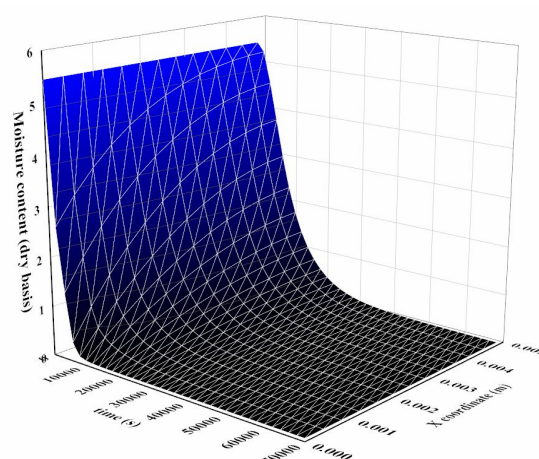
Model	R <sup>2</sup>	RMSE
Analytical model (Eq. 1)	0.948	0.603
Numerical model (Eq. 2)	0.990	0.107
Numerical model (Eq. 12)	0.992	0.301
Numerical model (combined)	0.999	0.060

#### ۴- نتیجه گیری کلی

اگر چه اطلاعات در زمینه خشک کردن میوه ها و سبزیجات در منابع به وفور وجود دارد، ولی اطلاعات بسیار کمی در زمینه خشک کردن گلابی بخصوص رقم سیبری در ایران و حتی جهان وجود دارد و نتایج این تحقیق می‌تواند اطلاعات مفیدی در خصوص شرایط خشک کردن و در نهایت بهینه سازی فراوری این محصول در اختیار قرار دهد. در این تحقیق، چندین مدل ریاضی نظری برای توصیف انتقال جرم در حین خشک کردن بر اساس حل قانون دوم فیک بر روی نرم افزار MATLAB توسعه داده شد. برای تایید مدل توسعه داده شده، نتایج تجربی با نتایج پیش بینی شده توسط مدل‌ها مورد مقایسه قرار گرفت و بهترین مدل بر اساس شاخص‌های آماری انتخاب شد. مدل ترکیبی عددی نشان داد که قادر است تغییرات رطوبت در حین خشک کردن را با دقت بالایی پیش بینی نماید. از این مدل برای شناخت بهتر مکانیسم انتقال جرم در داخل ورقه های گلابی می‌توان سود جست و محصولاتی با کیفیت بالا و یکنواخت تولید نمود. در گام بعدی تحقیق، می‌توان مدل‌های انتقال حرارت و یا تغییرات شکل محصول در حین خشک کردن را در این مدل ادغام کرد.



**Fig 8** moisture changes at three points (center, surface and interface) predicted by the combined numerical model during drying.



**Fig 9** Response surface of combined numerical model for moisture content (dry basis) as a functions of space and time at 70°C.

*Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 51(9), 843-854

- [11] Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion* (2nd Edition ed.). England: Oxford University Press.
- [12] Dalvi, M., Hamdami, N. (2010). Numerical Heat Transfer Modeling in Ultrafiltered White Cheese. *Food research*, 20(2), 45-60.
- [13] McCarthy, M. J., Perez, E., & Özilgen, M. (1991). Model for Transient Moisture Profiles of a Drying Apple Slab Using the Data Obtained with Magnetic Resonance Imaging. *Biotechnology Progress*, 7(6), 540-543.
- [14] Guiné, R. P. F. (2009). Sorption Isotherms of Pears Using Different Models. *International Journal of Fruit Science*, 9(1), 11-22.
- [15] Dalvi-Isfahan, M. (2020). A comparative study on the efficiency of two modeling approaches for predicting moisture content of apple slice during drying. *Journal of food process engineering*, 43(11), e13527.
- [16] Golestani, R., Raisi, A., & Aroujalian, A. (2013). Mathematical Modeling on Air Drying of Apples Considering Shrinkage and Variable Diffusion Coefficient. *Drying Technology*, 31(1), 40-51.
- [17] da Silva, W. P., e Silva, C. M. D. P. S., Farias, V. S. O., & Gomes, J. P. (2012). Diffusion Models to Describe the Drying Process of Peeled Bananas: Optimization and Simulation. *Drying Technology*, 30(2), 164-174.
- [18] Manjunatha, S., & Raju, P. (2019). Mathematical Modelling the Drying Kinetics of Beetroot Strips during Convective Drying at Different Temperatures. *Defence Life Science*, 4(2), 140-149.
- [19] Royen, M. J., Noori, A. W., & Haydary, J. (2020). Experimental Study and Mathematical Modeling of Convective Thin-Layer Drying of Apple Slices. *Processes*, 8(12), 1562.
- [20] Onwude, D. I., Hashim, N., Janius, R. B., Nawi, N. M., & Abdan, K. (2016). Modeling the Thin-Layer Drying of Fruits and Vegetables: A Review. *Comprehensive reviews in food science and food safety*, 15(3), 599-618.
- [21] Yuan, Y., Tan, L., Xu, Y., Yuan, Y., & Dong, J. (2019). Numerical and experimental study on drying shrinkage-deformation of apple slices during process of heat-mass
- [1] Guiné, R. P. F., Ferreira, D. M. S., Barroca, M. J., & Gonçalves, F. M. (2007). Study of the drying kinetics of solar-dried pears. *Biosystems Engineering*, 98(4), 422-429.
- [2] Darvishi, H., Asl, A. R., Asghari, A., Azadbakht, M., Najafi, G., & Khodaei, J. (2014). Study of the drying kinetics of pepper. *Journal of the Saudi Society of Agricultural Sciences*, 13(2), 130-138.
- [3] Castro, A. M., Mayorga, E. Y., & Moreno, F. L. (2018). Mathematical modelling of convective drying of fruits: A review. *Journal of Food Engineering*, 223, 152-167.
- [4] Wang, W., Chen, G., & Mujumdar, A. S. (2007). Physical Interpretation of Solids Drying: An Overview on Mathematical Modeling Research. *Drying Technology*. 4(25), 659-668
- [5] Erbay, Z., & Icier, F. (2010). A Review of Thin Layer Drying of Foods: Theory, Modeling, and Experimental Results. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 50(5), 441-464.
- [6] Rathnayaka Mudiyansele, C. M., Karunasena, H. C. P., Gu, Y. T., Guan, L., & Senadeera, W. (2017). Novel trends in numerical modelling of plant food tissues and their morphological changes during drying – A review. *Journal of Food Engineering*, 194, 24-39
- [7] Kulkarni, N., & Rastogi, A. (2014). Comparison of Explicit Finite Difference Model and Galerkin Finite Element Model for Simulation of Groundwater Flow. In).
- [8] Agrawal, S. G., & Methekar, R. N. (2017). Mathematical model for heat and mass transfer during convective drying of pumpkin. *Food and Bioproducts Processing*, 101, 68-73.
- [9] Szadzińska, J., & Mierzwa, D. (2021). The influence of hybrid drying (microwave-convective) on drying kinetics and quality of white mushrooms. *Chemical Engineering and Processing - Process Intensification*, 167, 108532.
- [10] Kaya, A., Aydin, O., & Dincer, I. (2007). Numerical Modeling of Forced-Convection Drying of Cylindrical Moist Objects.

۵- منابع

- the transport phenomena occurring during convective drying: Apple slices. *Journal of Food Engineering*, 123, 87-93.
- [25] Janjai, S., Lamlert, N., Intawee, P., Mahayothee, B., Haewsungcharem, M., Bala, B. K., & Müller, J. (2008). Finite element simulation of drying of mango. *Biosystems Engineering*, 99(4), 523-531.
- [26] Bourne, M. C. (1986). Effect of water activity on texture profile parameters of apple flesh. *Journal of Texture Studies*. 17(3), 331-340.
- transfer. *International Journal of Thermal Sciences*, 136, 539-548.
- [22] Castro, A. M., Mayorga, E. Y., & Moreno, F. L. (2019). Mathematical modelling of convective drying of feijoa (*Acca sellowiana Berg*) slices. *Journal of Food Engineering*, 252, 44-52.
- [23] Kaddoura, M. F., Chosa, M., Bhalekar, P., & Wright, N. C. (2021). Mathematical modeling of a modular convection-enhanced evaporation system. *Desalination*, 510, 115057.
- [24] Esfahani, J. A., Majdi, H., & Barati, E. (2014). Analytical two-dimensional analysis of



## Development of a mathematical model for predicting moisture changes in pear during convective drying

Dalvi Isfahan, M. <sup>1\*</sup>

1. Assistant professor, Department of Food Science and Technology, Faculty of Agriculture, Jahrom University, Jahrom, Iran.

### ARTICLE INFO

#### Article History:

Received 2021/06/19

Accepted 2021/10/14

#### Keywords:

Drying,  
Numerical solution,  
Analytical solution,  
Pear.

**DOI:** 10.52547/fsct.18.120.22

**DOR:** 20.1001.1.20088787.1400.18.120.11.3

\*Corresponding Author E-Mail:  
dalvi@jahromu.ac.ir

### ABSTRACT

The efficiency of several theoretical models to predict the moisture content of pear slices during drying were evaluated and compared. Pear slices were dried at 5 different temperatures (30-40-50-60-70°C) and the moisture diffusivity and convective mass transfer coefficient were estimated. In the next step, mass transfer model was developed by using mathematical solution of Fick's second law of diffusion with different numerical and analytical approaches. The results of the studied models indicated that the both numerical models were substantially more accurate than analytical model in describing the experimental drying curves. However, the best result was obtained with the combined model developed in this study. This model presents the highest coefficient of determination ( $R^2$ ) value (0.999), and the lowest root mean square error (RMSE) value (0.06). The higher accuracy of this model can be attributed to the fact that this model takes into account the term that simulate the convective moisture transport and chooses the appropriate boundary conditions. By applying this model, it is possible to predict moisture variations in pear slices with high accuracy as a function of internal variables (thickness, chemical composition) and external factors (temperature, relative humidity and air velocity).