



پیش بینی زمان انجماد و مدل سازی عددی انتقال حرارت در حین فرآیند انجماد

محسن دلوی اصفهان^{۱*}، امیر دارائی گرمه خانی^۲

۱- استادیار گروه علوم و صنایع غذایی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران.

۲- استادیار، گروه مهندسی علوم و صنایع غذایی، دانشکده فنی و منابع طبیعی تویسرکان، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.

اطلاعات مقاله	چکیده
تاریخ های مقاله : تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۸	در این مطالعه، از سه مدل ریاضی (پلانک، فام و مدل عددی (اجزاء محدود)) برای پیش بینی زمان انجماد نمونه‌های سیب زمینی استفاده شد. به منظور توسعه مدل عددی، خصوصیات ترموفیزیکی (چگالی، هدایت حرارتی و گرمای ویژه) به عنوان تابعی از ترکیب نمونه و دما پیش بینی شد. ضریب انتقال حرارت همرفتی نیز با استفاده از روش مسئله معکوس و اعداد بدون بعد برآورد شد. نتایج نشان داد که زمان محاسبه شده توسط مدل عددی از بین سه مدل دیگر، دقیق‌ترین بوده و در مرحله بعدی بهترین مدل، مدل پیشنهادی فام است. علاوه بر این، تطابق خوبی بین دمای مشاهده شده و دمای پیش بینی شده توسط روش عددی در روش‌های مختلف انجماد مشاهده شد. به عنوان نتیجه گیری کلی، مدل عددی توسعه یافته، دمای نمونه‌های سیب زمینی را به درستی در حین انجماد پیش بینی می‌کند و می‌تواند برای شبیه سازی انجماد مواد غذایی معلق در هوا مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این، روش مسأله معکوس توسعه داده شده برای پیش بینی ضریب انتقال حرارت همرفتی می‌تواند در سیستم‌های مختلف انجماد به منظور انتخاب بهترین سیستم یا بهینه سازی روند انجماد مواد غذایی بکار گرفته شود.
کلمات کلیدی: اجزاء محدود، انجماد، زمان انجماد، مدل عددی.	
DOI: 10.52547/fsct.18.116.171	
* مسئول مکاتبات: dalvi@jahromu.ac.ir	

۱- مقدمه

مدل سازی انتقال حرارت در حین انجماد به منظور تعیین دقیق زمان انجماد، بهینه سازی فرایند و طراحی مناسب سیستم انجماد ضروری و لازم به نظر می‌رسد. اگرچه تعداد زیادی مدل برای پیش بینی زمان انجماد محصولات غذایی ارائه شده است با این حال، به دلیل اینکه خصوصیات حرارتی ماده غذایی (گرمای ویژه، دانسیته، هدایت حرارتی) وابستگی شدیدی به دما در حین فرایند انجماد دارند، از این رو به عنوان یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی محسوب شده و امکان حل مسأله از طریق روش‌های حل ناپایا تک فازی وجود ندارد در مجموع دو روش اصلی برای حل مسایل انجماد پیشنهاد می‌شود که عبارتند از: حل تحلیلی و حل عددی [۱].

در روش حل تحلیلی، مدل پلانک به عنوان نقطه شروع معادلات استفاده می‌شود، اما از آنجا که این معادله صرفاً زمان تغییر فاز را مشخص می‌کند، با گذشت زمان اصلاحاتی بر روی آن انجام شده است و امروزه تقریباً ۳۰ معادله مختلف در روش تحلیلی وجود دارد که آن‌ها را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم بندی نمود. گروه اول برای اشکال منظم از قبیل صفحه، استوانه و یا کره بکار گرفته می‌شود و گروه دوم برای اشکال هندسی نامنظم استفاده می‌شود. در این سری مدل‌ها در گام اول زمان انجماد با استفاده از یکی از روش‌های قابل استفاده برای اشکال منظم معین می‌شود و در گام دوم، یک یا چند ضریب اصلاحی برای در نظر گرفتن شکل نامنظم در مدل اعمال می‌گردد [۲].

در روش حل عددی، امکان تخمین تغییرات دما به عنوان تابعی از خصوصیات حرارتی ماده غذایی و تغییرات آنتالپی محصول وجود دارد. از مهم‌ترین مزایای این روش می‌توان به تعیین دما در محدوده وسیعی از دما و با در نظر گرفتن تغییرات ویژگی‌های ترموفیزیکی محصول و به‌کارگیری برای اشکال نامنظم اشاره کرد. سابقه حل مدل انتقال حرارت در حین انجماد با روش عددی به حدود ۴۰ سال قبل و به استفاده از روش تفاضل محدود بر می‌گردد. Cleland and Earle (۱۹۷۷) به توسعه مدل تفاضل محدود برای حل مدل انجماد مواد غذایی با اشکال منظم (تیغه، استوانه، کره و مکعب مستطیل) و در نظر گرفتن دما به عنوان تنها متغیر وابسته پرداختند [۳]. Mannapperuma and Singh

(۱۹۸۸)، مدل انجماد برای اشکال هندسی منظم را با روش آنتالپی فرموله و حل کردند و این روند توسط Pham (۱۹۸۵) با ترکیب هم‌زمان دو متغیر وابسته دما و آنتالپی اصلاح شد [۴ و ۵]. با وجود سهولت به‌کارگیری روش تفاضل محدود، این روش با نواقص و محدودیت‌هایی نیز روبرو هست که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به عدم امکان به‌کارگیری برای اشکال با مرزهای منحنی شکل و یا عدم کارآمدی این روش برای حل مسایلی است که در آن نواحی حل با گرادینان زیادی از تابع هدف روبرو می‌شود، اشاره کرد. در مقابل روشی که امروزه بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش عناصر محدود می‌باشد که به دلیل آزادی در انتخاب اندازه، ابعاد و شکل اجزاء بیشتری کاربرد را در حوزه مدل سازی مواد غذایی در بر می‌گیرد [۶].

بر اساس مطالعه انجام شده توسط Ebrahimnia-Bajestan و همکاران (۲۰۱۲) و Fricke و Becker (۲۰۰۶) مهم‌ترین منبع خطا در حین مدل سازی فرایند انجماد مواد غذایی تعیین دقیق ضریب انتقال حرارت همرفتی می‌باشد. روش‌های متنوعی برای تعیین ضریب انتقال حرارت در سطح وجود دارد که شامل انواع اندازه گیری دمای گذرا، سرعت کاهش جرم و روش سایکرومتری^۱، استفاده از حسگرهای شار حرارتی^۲، روش‌های تخمین ضریب انتقال حرارت از طریق روابط تجربی می‌باشند ولی هر یک از این روش‌ها محدودیت‌ها و نقاط ضعف مخصوص به خود را دارد [۹]. ذکر این نکته اهمیت دارد که مقدار عددی این ضریب به عوامل متعددی از قبیل سرعت سیال، ویژگی‌های سطحی جسم جامد، اندازه و شکل جسم و خصوصیات سیال (دانسیته و ویسکوزیته) و وابسته است و همین موضوع تعیین و تخمین دقیق این پارامتر را دشوار می‌سازد [۷ و ۸]. علاوه بر این عوامل، پارامترهای دیگری نیز می‌توانند دخیل باشند که معمولاً در مدل‌ها مورد توجه قرار نمی‌گیرند و نتایج را با خطا روبرو می‌کنند، برای مثال Dima و همکاران (۲۰۱۴) نشان دادند که مقدار ضریب انتقال حرارت در سطح حتی به موقعیت و نحوه قرارگیری مواد غذایی در سیستم انجماد نیز بستگی دارد [۱۰].

1. Transient Temperature measurement
2. Mass-loss-rate and psychrometry method
3. Heat flux sensors

باد سنج (لوترون، تایوان) مشخص شد که مقداری حدود ۱/۳ متر بر ثانیه را نشان داد. برای تعیین پروفیل دمای محصول در حین انجماد از ۲ عدد ترموکوپل نوع K که به ترتیب در مرکز حرارتی و محیط فریزر قرار داده شده بود استفاده گردید. در گام بعدی نقطه انجماد اولیه و مقدار آب باند شده با استفاده از روابط ۱ و ۲ معین شد [۱۳].

(۱)

$$\frac{1}{T_f} = \frac{1}{T_{f0}} - \frac{RM_w}{\lambda} \ln \left[\frac{\frac{m_U - m_b}{M_w}}{\frac{m_U - m_b}{M_w} + \sum_i \left(\frac{m_i}{M_i} \right)} \right]$$

$$x_b = x_s \cdot b \quad (2)$$

در این روابط T_{f0} ، R ، λ به ترتیب نقطه انجماد آب، ثابت گازها و گرمای نهان ذوب می‌باشد و m_U ، m_b ، m_i ، M_w ، M_i و M_i نیز به ترتیب آب غیر قابل انجماد، آب باند شده، کسر جرمی تک تک مواد خشک ماده غذایی، وزن مولکولی آب و وزن مولکولی تک تک مواد خشک می‌باشد. در رابطه دوم نیز X_s و b به ترتیب کسر جرمی مواد خشک و ثابت معادله که بسته به نوع ماده غذایی دارد و برای سبزیجات بین ۰/۱۸ تا ۰/۲۵ گزارش شده است [۱۴].

۲-۱- تعیین خصوصیات ترموفیزیکی نمونه

ویژگی‌های حرارتی نمونه مشتمل بر هدایت حرارتی، گرمای ویژه و دانسیته به عنوان تابعی از دما و ترکیب شیمیایی نمونه تعیین شد. در مدل‌های ترموفیزیکی ماده غذایی، ابتدا میزان یخ تشکیل شده و آب قابل انجماد بر اساس روابط ۳-۵ به عنوان تابعی از دما مشخص شد و در گام بعد با تعیین کسر حجمی تک تک اجزای تشکیل دهنده ماده غذایی (رابطه ۶)، هدایت حرارتی نمونه با استفاده از مدل موازی تعیین شد (رابطه ۷). روابط ۸ و ۹ به ترتیب برای تعیین گرمای ویژه ماده غذایی و دانسیته ماده غذایی استفاده شدند [۱۵].

$$x_i(T) = 0 \quad \text{if} \quad T \geq T_f \quad (3)$$

$$x_{iw}(T) = x_{iw} - x_i(T) \quad (4)$$

استفاده از روش‌های مسأله معکوس در تخمین خصوصیات ترموفیزیکی مواد غذایی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در روش مسأله معکوس TP، اندازه گیری‌های گسسته‌ای از متغیر وابسته (دما) در داخل دامنه برای تخمین ثابت‌های نامعلوم (پارامترهای مدل) بکار می‌رود، در این روش ساختار معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم معلوم بوده و ورودی‌های مدل از قبیل شرایط اولیه و شرایط مرزی قابل اندازه گیری هستند و برخی یا تمام پارامترهای مدل نامعلوم هستند. هدف این روش بدست آوردن بهترین تخمین برای پارامتر یا پارامترهای مورد نظر با استفاده از مقادیر اندازه گیری شده ورودی و خروجی است [۱۱]. Salas-Valerio و همکاران (۲۰۱۹) میزان ضریب انتقال حرارت در سطح در حین انجماد نمونه‌های غذایی را با استفاده از همین روش محاسبه نمودند [۱۲].

هدف این تحقیق، تعیین و مقایسه زمان انجماد نمونه سیب زمینی در فریزر با هوای ساکن و هوای متحرک با روش‌های تحلیلی (پلانک و فام) و مقایسه آن با مدل توسعه داده شده با روش اجزاء محدود می‌باشد، علاوه بر این در مدل‌های مذکور ضریب انتقال حرارت با استفاده از روش جدید مسئله معکوس و بر اساس بهینه سازی غیر خطی تعیین شد.

۲- مواد و روش‌ها

به دلیل سهولت دسترسی و امکان تعیین دقیق ترکیب شیمیایی، از نمونه سیب زمینی در این مطالعه استفاده شد. برای تعیین میزان چربی، رطوبت، خاکستر و پروتئین نمونه به ترتیب از روش سوکسله، خشک کردن با آون، کوره الکتریکی و روش کلدال استفاده شد، نتایج تجزیه شیمیایی نمونه‌ها در جدول ۱ آورده شده است. نمونه‌ها با استفاده از یک چوب پنبه سوراخ کن به استوانه‌ای با ابعاد ۶۵×۲۰ میلی‌متر برش خوردند و با استفاده از یک نخ در داخل فریزر به صورت معلق نگه داشته شدند. به منظور جلوگیری از انتقال جرم در حین فرایند انجماد یک پوشش پلی اتیلنی در اطراف نمونه قرار گرفت. برای شبیه سازی فریزر در هوای ثابت، فن دستگاه فریزر (گروک، ایران) خاموش شد (سرعت حدود ۰/۲ متر بر ثانیه) و برای شبیه سازی حالت انجماد در هوای متحرک، سرعت هوا در داخل دستگاه با استفاده از یک

میزان ضریب انتقال حرارت در سطح با استفاده از رابطه ۱۱ به دست آمد.

$$h = \frac{M_{Al} C_{pAl}}{Sm} \quad (11)$$

در رابطه ۱۱، M_{Al} ، C_{pAl} ، S و m به ترتیب جرم قطعه آلومینیومی، گرمای ویژه آلومینوم، مساحت سطح آلومینیوم و شیب خط نمودار تغییرات لگاریتمی اختلاف دمای محیط از دمای قطعه آلومینیومی نسبت به زمان می باشد.

۲-۲-۳- ضریب انتقال حرارت با استفاده از روش بهینه سازی غیر خطی (روش SNOPT^۴)

حل مسئله بهینه سازی شامل دو بخش تبدیل مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه سازی غیر خطی و بخش دیگر، حل مسئله بهینه سازی غیر خطی می باشد. برای حل عددی برنامه ریزی غیر خطی الگوریتم های بسیار زیادی توسعه داده شده است. یکی از این الگوریتم ها روش SQP^۵ می باشد. همچنین کدهای نرم افزاری بسیار زیادی نیز به زبان های برنامه نویسی مختلف موجود می باشد. یکی از کدهای نرم افزاری که بسیار مورد توجه است، الگوریتم SNOPT می باشد. ویرایش های بسیار زیادی از این نرم افزار تحت متلب و کامسول قابل اجرا می باشد. الگوریتم حل از روش های گرادینانی بهره می گیرد، به طوری که مشتقات جزئی مرتبه اول را به عنوان ورودی دریافت می کند و برای محاسبه مشتقاتی که در دسترس نیستند، از روش تفاضل محدود استفاده می کند. برای روش انجماد با هوای ساکن، ضریب انتقال حرارت در محدوده بین ۵-۲۰ وات بر متر مربع کلین و برای انجماد با هوای متحرک مقدار این ضریب در گستره ۱۵-۵۰ وات بر متر مربع کلین تعریف شد [۱۷].

۲-۲-۳- تعیین زمان فرایند انجماد

۲-۳-۱- مدل پلانک

تلاش های زیادی برای یافتن روشی ساده و منطقی برای پیش بینی زمان انجماد صورت گرفته است. معروف ترین و ساده ترین مدل معادله پلانک می باشد.

$$x_i(T) = (x_{iw} - x_b) \left(1 - \frac{T_f - 27315}{T - 27315} \right) \text{ if } T < T_f \quad (5)$$

$$V_i = \frac{x_i / \rho_i}{\sum (x_i / \rho_i)} \quad (6)$$

$$k = \sum_{i=1}^N k_i V_i \quad (7)$$

$$C_{papp} = C_{ps}(T)x_s + C_{pw}(T)x_w(T) + C_{pi}(T)x_i(T) + L \frac{dx_i}{dT}(T) \quad (8)$$

$$\rho = \frac{1}{\sum x_i / \rho_i} \quad (9)$$

۲-۲-۲- تعیین ضریب انتقال حرارت در سطح

همان طور که پیش تر اشاره شد، دقت مدل انتقال حرارت رابطه ای بسیار نزدیکی با دقت در پیش بینی ضریب انتقال حرارت در سطح دارد و در این مطالعه این ضریب با دو روش مختلف برآورد گردید.

۲-۲-۱- تعیین ضریب انتقال حرارت با استفاده از اعداد بدون بعد

برای تعیین ضریب انتقال حرارت در استوانه و در محدوده عدد رینولدز (۳/۵-۸۰۰۰۰)، Valentas و همکاران (۱۹۹۷) رابطه زیر را ارائه داده اند [۱۶].

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0.4 Pr^{1/3}) \right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (10)$$

۲-۲-۲- تعیین ضریب انتقال حرارت با استفاده از روش دمای گذرا (ناپایا)

برای تعیین ضریب انتقال حرارت در سطح از روش اندازه گیری دما در حالت گذرا استفاده شد. بدین منظور از یک قطعه آلومینیومی که در چارچوبی از جنس پلی استیرن قرار گرفته بود و دو عدد ترموکوپل از نوع K که تغییرات دما در مرکز قطعه آلومینیومی و دمای هوای محیط را ثبت می کردند، استفاده شد و

4. Sparse Nonlinear Optimizer
5. Sequential quadratic programming

در نرم افزار COMSOL از روش گرمای ویژه ظاهری^۱ استفاده شود در این روش، گرمای محسوس ماده غذایی با گرمای نهان ذوب ادغام می‌شود و در این مطالعه از همین روش استفاده شد [۱۸، ۲۰ و ۲۱].

با توجه به در نظر گرفتن تقارن محوری برای نمونه و انتقال حرارت به روش همرفت در سطح نمونه شرایط مرزی زیر برای مدل در نظر گرفته شد.

برای سطح نمونه

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_a) \quad (15)$$

شرط تقارن

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, z, t) = 0 \quad (16)$$

۲-۴-۴ تجزیه و تحلیل آماری

دو معیار آماری، ضریب تبیین (R^2) و ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای ارزیابی تناسب بین مدل با داده‌های تجربی (آزمایشی) مورد استفاده قرار گرفت [۲۲].

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (T_{pre,i} - T_{exp,i})^2}{\sum_{i=1}^N (T_{pre,i} - T_{pre,i})^2} \quad (17)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_{exp,i} - T_{pre,i})^2}{N}} \quad (18)$$

در روابط بالا $T_{pre,i}$ و $T_{exp,i}$ به ترتیب دمای پیش بینی شده توسط مدل‌ها و دمای آزمایشی و N تعداد داده‌ها می‌باشد.

۳- نتایج و بحث

اگرچه سبب زمینی محصولی با میزان رطوبت بالا می‌باشد و به همین دلیل انتظار می‌رود خصوصیات ترموفیزیکی آن مشابه آب باشد، لیکن به دلیل داشتن قند های ساده و مواد معدنی نقطه انجماد اولیه آن کمتر از آب می‌باشد (۱/۰۵- درجه سانتی‌گراد).

$$t_F = \frac{\rho_f L}{T_F - T_a} \left(\frac{Pa}{h} + \frac{Ra^2}{k_f} \right) \quad (12)$$

در رابطه بالا ρ_f ، L ، T_F ، T_a ، P ، R ، a ، h و k_f به ترتیب دانسیته ماده غذایی منجمد، گرمای نهان انجماد ماده غذایی، دمای اولیه انجماد، دمای محیط (دمای هوا)، فاکتور شکل، فاکتورهای مربوط شکل نمونه، کوتاه‌ترین بعد نمونه، ضریب انتقال حرارت در سطح، هدایت حرارتی ماده غذایی در فاز انجماد و مدت زمان انجماد می‌باشد [۱۸].

۲-۳-۲ مدل فام

روش فام بسیاری از محدودیت‌های روش پلانک در تخمین مدت زمان انجماد را ندارد و از دقت بالایی در بین انواع مدل‌های تحلیلی برخوردار است [۱۸ و ۱۹].

$$t_F = \frac{d_c}{E_f h} \left(\frac{\Delta H_1}{\Delta T_1} + \frac{\Delta H_2}{\Delta T_2} \right) \left(1 + \frac{N_{Bi}}{2} \right) \quad (13)$$

در رابطه فوق، ΔH_1 ، ΔH_2 ، ΔT_1 ، ΔT_2 ، E_f ، N_{Bi} ، E_f ، h و d_c به ترتیب آنتالپی حجمی در مرحله پیش سرمايش، آنتالپی حجمی در مرحله تغییر فاز و انجماد، گرادیان دمایی اولیه و ثانویه، فاکتور شکل نمونه، ضریب انتقال حرارت در سطح و عدد بیوت می‌باشد.

۲-۳-۳ مدل عناصر محدود

معادله حاکم و شرایط مرزی و اولیه با استفاده از نرم افزار 5.5 COMSOL برای مختصات استوانه‌ای و در حالت دو بعدی متقارن و با المان درجه دوم لاگرائز با اشکال مثلثی به عنوان تابع پایه حل شد.

با توجه به شکل هندسی نمونه (استوانه محدود)، معادله انتقال حرارت دو بعدی و با فرض وابستگی خصوصیات حرارتی نمونه به دما می‌توان معادله زیر را نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) \quad (14)$$

با توجه به وابستگی شدید خصوصیات ترموفیزیکی ماده غذایی به دما در حین انجماد، (Pham 1995, 2001) توصیه نمود که

Table 1 Chemical composition of potatoes

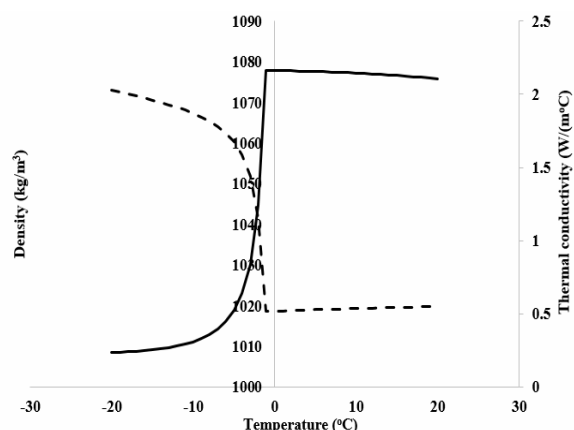
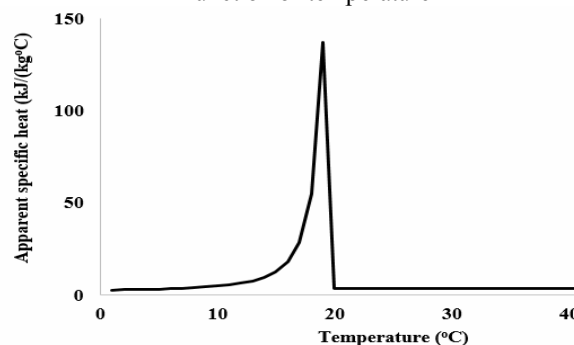
Component	Percentage
Moisture	79.8±0.04
Protein	2.5±0.02
Fat	0.5±0.04
Ash	0.25±0.05
Carbohydrate *	16.94
*(100-Fat-Moisture-Carbohydrate-Ash) Mean±Std	

نتایج مشابهی توسط Rahman و همکاران (2009) گزارش شده است [۱۳]. در ضمن همان‌طور که انتظار می‌رفت سایر ویژگی‌های حرارتی از قبیل دانسیته و گرمای ویژه در دماهای زیر نقطه انجماد روند کاهشی را نشان می‌دهند، در حالی که هدایت حرارتی محصول در دماهای زیر صفر درجه حدوداً ۴ برابر افزایش نشان می‌دهد (جدول ۲ و اشکال ۱ و ۲) که به دلیل هدایت حرارتی بالاتر یخ نسبت به آب می‌باشد [۱۶].

Table 2 Thermophysical properties of potato

Thermal properties	Value
Bound water	0.18
Unfreezable water (%)	2.13
Initial freezing temperature (°C)	-1.05
Density of unfrozen sample (kg/m ³)	1075
Density of frozen sample (kg/m ³)	1010
Thermal conductivity of unfrozen sample (W/m °C)	2.02
Thermal conductivity of frozen sample (W/m °C)	0.55
Specific heat of unfrozen sample (kJ/kg °C)	3.65
Specific heat of frozen sample (kJ/kg °C)	2.78
Latent heat of fusion (Peak) (kJ/kg)	137.27

جدول ۲، مدت زمان لازم برای رسیدن به دمای -۲۰ درجه سانتی‌گراد بر اساس ۳ مدل مختلف و مقایسه آن با نتایج تجربی را نشان می‌دهد این زمان که تحت عنوان مدت زمان انجماد موثر^۷ شناخته می‌شود، شاخص مهمی برای تعیین ظرفیت فریزرها می‌باشد [۲۳]. همان‌طور که انتظار می‌رود کم‌ترین دقت در برآورد این زمان در مدل پلانک مشاهده می‌شود، که دلیل آن می‌تواند به فرضیات حاکم بر این مدل از جمله عدم در نظر گرفتن وابستگی دمایی خصوصیات ترموفیزیکی و صرف نظر کردن از حذف گرمای محسوس نمونه غیر منجمد و یا نمونه بعد از تغییر فاز مرتبط باشد، در مقابل مدل اجزاء محدود و در مرحله بعد مدل فام با دقت قابل قبولی توانسته است زمان انجماد نمونه تا رسیدن دمای -۲۰ درجه سانتی‌گراد در مرکز حرارتی سیب زمینی را پیش بینی نماید [۱۶]. در رابطه فام ΔH_1 آنتالپی حجمی، از دمای اولیه نمونه تا رسیدن به نقطه انجماد اولیه و ΔH_2 آنتالپی حجمی در مرحله تغییر فاز و کاهش دما تا رسیدن به دمای نهایی می‌باشد. مقدار عددی این دو ضریب برای انجماد تحت هوای ساکن به ترتیب برابر با ۱۰۸۵۸۷۸۸۰ و

**Fig 1** Density and thermal conductivity of potato as a function of temperature**Fig 2** Apparent specific heat of potato as a function of temperature

7. Effective freezing time

محدوده دمایی محتمل می‌باشد [۲۴]. همان‌طور که انتظار می‌رود سرعت انجماد برای فریزر با هوای متحرک، حدوداً ۲/۶ برابر بیشتر از فریزر با هوای ساکن می‌باشد که به همین دلیل زمان رسیدن نمونه به دمای ۲۰- درجه سانتی‌گراد در فریزر ساکن نیز حدود ۲/۵ برابر بیشتر شده است.

۳۱۵۹۰۸۰۴۹ ژول بر متر مکعب و برای انجماد با هوای متحرک ۳۱۶۴۲۱۲۳۵ و ۸۵۰۷۱۴۲۰ ژول بر متر مکعب محاسبه شد (جدول ۳). علاوه بر این، سرعت انجماد در محدوده دمایی (نقطه انجماد اولیه محصول تا پنج درجه زیر نقطه انجماد) تعیین شد، در این محدوده دمایی بیشترین میزان یخ در محصول تشکیل می‌شود و در نتیجه بیشترین آسیب به بافت محصول نیز در همین

Table 3 Freezing time predicted by three different models and freezing rate calculated in two different freezing system

	Still air	Air Blast
Freezing time to reach -20 (°C)- Plank model (s)	4296	1644
Freezing time to reach -20 (°C)- Pham model (s)	7240	2873
Volumetric enthalpy in pre-cooling (ΔH_1) (J/m ³)	108587880	85071420
Volumetric enthalpy in phase change and post-cooling (ΔH_2) (J/m ³)	315908049	316421235
Freezing time to reach -20 (°C)- Finite element model (s)	6250	2630
Freezing time to reach -20 (°C)- Experimental (s)	6669	2709
Freezing rate (°C/min)	0.44	1.07

استفاده شد، که دقت بالاتری نسبت به روش‌های بهینه سازی آماری دارد. شکل ۳ رابطه بین تعداد تکرار^۱ با میزان خطای محاسبه شده را نشان می‌دهد، شرط توقف در این روش بهینه سازی رسیدن به یک حداقل خطا (همگرایی) و یا رسیدن به حداکثر تعداد تکرار که در تنظیمات ۱۰۰۰ تعریف شده بود می‌باشد و همان‌طور که مشاهده می‌شود، رسیدن به نقطه بهینه ضریب انتقال حرارت در سطح با تعداد کم تکرار به دست آمده است (شکل ۴). نتایج به دست آمده از ضریب انتقال حرارت در سطح با روش مسأله معکوس در مدل اجزاء محدود برای پارامتر ضریب انتقال حرارت در سطح بکار گرفته شد.

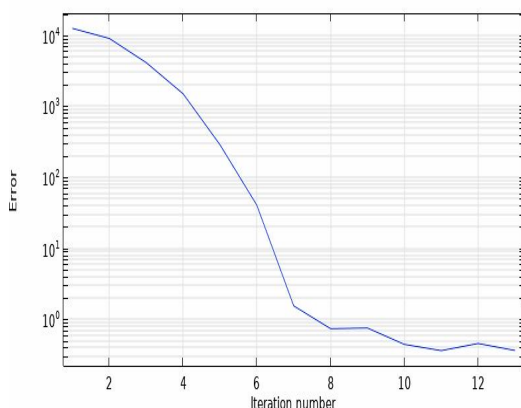


Fig 3 The relationship curve of Error and iteration number

8. Iteration

ضریب انتقال حرارت در سطح نقش بسیار مهمی در دقت مدل انجماد ایفا می‌کند و این ضریب با سه روش مختلف تخمین زده شد. در روش اعداد بدون بعد، مقدار این ضریب برای فریزر با هوای ساکن و متحرک به ترتیب ۸/۵ و ۱۷ معین شد در حالی که در روش انتقال حرارت گذرا مقادیر ۱۵ و ۳۷ و در روش مساله معکوس نیز مقدار این پارامتر ۱۳/۴۲ و ۳۲/۸۵ وات بر متر مربع کلون معین شد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشترین اختلاف در نتایج این ضریب مربوط به اعداد بدون بعد می‌باشد که ناشی از دقت کم این روش در برآورد ضریب انتقال حرارت در سطح می‌باشد و این موضوع توسط سایر محققین نیز گزارش شده است [۸ و ۱۱]. اختلاف بین نتایج حاصل از روش ناپایا و روش مساله معکوس کمتر بوده و نشان دهنده دقت بالاتر این دو روش در برآورد این ضریب می‌باشد، اگر چه با توجه به مقایسه نتایج پروفیل دمای تجربی با دمای به دست آمده با روش حل اجزاء محدود، می‌توان نتیجه گرفت که دقت روش مساله معکوس در برآورد این پارامتر دقیق تر بوده است. روش اخیر برای تخمین ضریب انتقال حرارت در سطح به طور موفقیت آمیزی توسط Salas-Valerio و همکاران (۲۰۱۹) برای انجماد مواد غذایی نیز بکار گرفته شده است [۱۲]. در روش مورد مطالعه توسط این محققین از روش‌های آماری برای کاهش تابع خطا و پیدا کردن ضریب انتقال حرارت در سطح استفاده شده بود، در حالی که در این مطالعه از روش بهینه سازی غیر خطی برای این منظور

مسأله معکوس به دلیل دقت بالای آن می‌تواند جایگزین روش‌های قدیمی‌تر از جمله روش اعداد بدون بعد شود.

۵- منابع

- [1] Delgado, A. E., and Sun, D. 2001. Heat and mass transfer models for predicting freezing processes-A review. *Journal of Food Engineering*, 47(3): 157-174.
- [2] López-Leiva, M., and Hallström, B. 2003. The original Plank equation and its use in the development of food freezing rate predictions. *Journal of Food Engineering*, 58(3): 267-275.
- [3] Cleland, A. C., and Earle, R. L. 1977. A comparison of analytical and numerical methods of predicting the freezing times of foods. *Journal of Food Science*, 42(5): 1390-1395.
- [4] Mannapperuma, J. D., and Singh, R. P. 1988. Prediction of freezing and thawing times of foods using a numerical method based on enthalpy formulation. *Journal of Food Science*, 53(2): 626-630.
- [5] Pham, Q. T. 1985. A fast, unconditionally stable finite-difference scheme for heat conduction with phase change, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(11): 2079-2084.
- [6] Erdoğan, F. 2000. *Optimization in Food Engineering*, CRC Press - Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA.
- [7] Ebrahimnia-Bajestan, E., Niazmand, H., Ehteminan-Farooji, V., and Ebrahimnia, E. 2012. Numerical modeling of the freezing of a porous humid food inside a cavity due to natural convection. *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, 62(3): 250-269.
- [8] Fricke, B. A., and Becker, B. R. 2006. Sensitivity of freezing time estimation methods to heat transfer coefficient error. *Applied Thermal Engineering*, 26(4): 350-362.
- [9] Carson, J. K., Willix, J., and North, M. F. 2006. Measurements of heat transfer coefficients within convection ovens. *Journal of Food Engineering*, 72(3): 293-301.
- [10] Dima, J. B., Santos, M. V., Baron, P. J., Califano, A., and Zaritzky, N. E. 2014. Experimental study and numerical modeling of

شکل ۴- مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از مدل اجزاء محدود و نتایج تجربی را نشان می‌دهد.

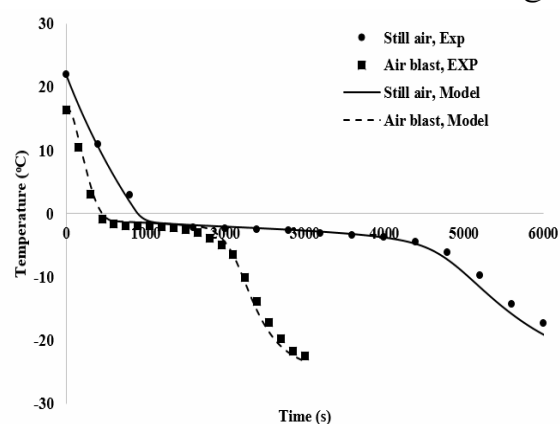


Fig 4 Comparison between temperature profiles of potato between finite element model and experimental

همان‌طور که مشاهده می‌شود در مجموع همبستگی و انطباق خوبی بین داده‌های مدل عددی و نتایج تجربی وجود دارد. به طوری که ضریب همبستگی و ریشه میانگین مربعات خطا بین نتایج تجربی هوای ساکن و مدل به ترتیب ۰.۹۹٪ و ۲/۶ است و این مقادیر برای نتایج تجربی هوای متحرک و مدل به ترتیب ۰.۹۹٪ و ۱/۰ را نشان می‌دهد، که نشان دهنده انطباق خوب بین نتایج مدل و نتایج تجربی است. با توجه به آنکه نمونه دارای یک پوشش پلی اتیلنی بود، امکان انتقال رطوبت به صورت تصعید یا تبخیر در حین فرایند انجماد وجود ندارد.

۴- نتیجه گیری

پیش بینی زمان انجماد نه تنها از نقطه نظر کیفی بلکه از جنبه اقتصادی نیز حائز اهمیت است. نتایج این مطالعه نشان داد که با به‌کارگیری مدل‌های عددی (اجزاء محدود) نه تنها زمان انجماد بلکه دمای هر نقطه از ماده غذایی در هر زمان را نیز می‌توان به راحتی تعیین نمود. با استفاده از مدل توسعه داده شده در این تحقیق به سهولت می‌توان انجماد در بستر شناور و یا انجماد در هوای ساکن و هوای متحرک را مدل سازی کرد. علاوه بر این با توجه به اهمیت فاکتور ضریب انتقال حرارت در سطح، در مدل‌های انجماد نتایج این تحقیق نشان داد که به‌کارگیری روش

- [17] Murray, G. P.E., and Saunders, M. A. 2002. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 12 (4): 979-1006.
- [18] Pham, Q.T. 2001. Prediction of cooling/freezing/thawing time and heat load. In: D.-W. Sun, ed. *Advances in Food Refrigeration*. Leatherhead: Leatherhead Food RA, pp. 110-152.
- [19] Pham, Q.T. 1984. An extension to Plank's equation for predicting freezing times of foodstuffs of simple shapes. *International Journal of Refrigeration*, 7: 377-383.
- [20] Pham, Q. T. 2006. Modelling heat and mass transfer in frozen foods: A review. *International Journal of Refrigeration*, 29 (6): 876-888.
- [21] COMSOL. 2007. Multiphysics Modelling by COMSOL, <http://www.comsol.com>.
- [22] Uyar, R., and Erdogdu, F. 2012. Numerical Evaluation of Spherical Geometry Approximation for Heating and Cooling of Irregular Shaped Food Products. *Journal of Food Science*, 77(7): E166-E175.
- [23] Zhao, Y., and Takhar, P. S. 2017. Freezing of foods: Mathematical and experimental aspects. *Food Engineering Reviews*, 9(1): 1-12.
- [24] James, C., Purnell, G., and James, S. J. 2015. A review of novel and innovative food freezing technologies. *Food and Bioprocess Technology*, 8(8): 1616-1634.
- the freezing process of marine products. *Food and Bioproducts Processing*, 92(1): 54-66.
- [11] Cornejo, I., Cornejo, G., Ramirez, C., Almonacid, S., and Simpson, R. 2016. Inverse method for the simultaneous estimation of the Thermophysical properties of foods at freezing temperatures. *Journal of Food Engineering*, 191: 37-47.
- [12] Salas-Valerio, W., Solano-Cornejo, M., Zelada-Bazán, M., and Vidaurre-Ruiz, J. 2019. Three-dimensional modeling of heat transfer during freezing of suspended and in-contact-with-a-surface yellow potatoes and ullucus. *Journal of Food Process Engineering*, 42(6): e13174.
- [13] Rahman, M. S., Machado-Velasco, K., Sosa-Morales, M., and Velez-Ruiz, J. F. 2009. Freezing point: Measurement, data, and prediction. In M. S. Rahman (Ed.), *Food properties handbook* (2nd ed., p. 838). Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, LLC.
- [14] Boonsupthip, W., Sajjaanantakul, T., and Heldman, D. R. 2009. Use of average molecular weights for product categories to predict freezing characteristics of foods. *Journal of Food Science*, 74(8): E417-E425.
- [15] Hamdami, N., Monteau, J.Y., and Le-Bail, A. 2004. Heat and mass transfer in par-baked bread during freezing. *Food Research International*, 37(5): 477-488.
- [16] Valentas, K. J., Rotstein, E., and Singh, R.P. 1997. *Handbook of food engineering practice*. Boca Raton, Fla., CRC Press.

۵- علائم و اختصارات

Cp	Specific heat (J/kg.K)	گرمای ویژه (ژول /کیلوگرم کلوین)
h	Averaged heat transfer coefficient at surface (W/m ² .K)	میانگین ضریب انتقال حرارت در سطح (وات / متر مربع کلوین)
k	Thermal conductivity (W/m.K)	هدایت حرارتی (وات بر متر کلوین)
L	Latent heat of fusion (J/kg)	گرمای نهان ذوب یخ (ژول بر کیلوگرم)
r	Radial coordination	مختصات شعاعی
R ²	Determination of coefficient	ضریب تبیین
RMSE	Root mean square of error	ریشه میانگین مربعات خطا
t	Time (min, s)	زمان (ثانیه - دقیقه)
T	Temperature (°C, K)	دما (سانتی گراد- کلوین)
x	Mass fraction of chemical composition of potato	کسر جرمی اجزای شیمیایی سیب زمینی
Z	Axial coordination	مختصات طولی
	Greek letters	حروف یونانی
v	Volume fraction	کسر حجمی
ρ	Density (kg/m ³)	دانسیته کیلوگرم بر متر مکعب
dc	Characteristic dimension	مشخصه بعد
Ef		فاکتور شکل نمونه در مدل فام
m	Moisture content	میزان آب
M	Molecular weight of water	وزن مولکولی
Nu	Nusselt number	عدد ناسلت
Bi	Biot number	عدد بیوت
P	Shape factor	فاکتور شکل هندسی نمونه
Pr	Prandtl number	عدد پرانتل
R	Universal gas constant-shape factor	ثابت گازها- فاکتور شکل هندسی نمونه
Re	Reynolds number	عدد رینولدز
ΔH	Volumetric enthalpy	آنتالپی حجمی
ΔT	Temperature gradient	گرادیان دما
	Subscript	زیر نویس
b	Bound	باند شده
c	Carbohydrate	کربوهیدرات
exp	Experimental	آزمایشی
fo	Freezing temperature	دمای انجماد
f		منجمد
i	Chemical composition, ice	اجزای شیمیایی - یخ
LW	Water in liquid state	آب در حالت مایع
p	Protein	پروتئین
pre	Predicted	پیش بینی شده
s	Solid materials	مواد جامد
tw	Total water	کل آب
w	Water	آب



Prediction of Freezing Time and Numerical Model of Heat Transfer during Freezing Process

Dalvi Isfahan, M. ^{1*}, Daraei Garmakhany, A. ²

1. Assistant professor, Department of Food Science and Technology, Faculty of Agriculture, Jahrom University, Jahrom, Iran.
2. Assistant professor, Department of Food Science and Technology, Tuyserkhan Faculty of Engineering & Natural Resources, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

ABSTRACT	ARTICLE INFO
<p>In this study, three mathematical models (Plank, Pham and numerical model (finite element)) were used to predict the freezing time of potato samples. In order to develop the numerical model, thermophysical properties (density, thermal conductivity and specific heat) were predicted as a function of sample composition and temperature. Convective heat transfer coefficient was also estimated using the inverse problem method and dimensionless numbers. The results showed that the time calculated by the numerical model was the most accurate among three models and in the next step the best model was Pham model. In addition, an excellent agreement was obtained between observed temperature and temperature predicted by the numerical method in different freezing methods. In conclusion, the developed numerical model predicts the freezing temperature of potato samples correctly and can be used to simulate the freezing of suspended food in the air. In addition, the inverse problem method developed to predict convective heat transfer coefficient can be used in different freezing systems in order to choose the best system or optimize the process of food freezing.</p>	<p>Article History: Received 2021/02/03 Accepted 2021/05/08</p> <hr/> <p>Keywords: Finite element, Freezing, Freezing time, Numerical model.</p> <hr/> <p>DOI: 10.52547/fsct.18.116.171</p> <hr/> <p>*Corresponding Author E-Mail: dalvi@jahromu.ac.ir</p>